MATHÉMATIQUES II

Statistique et probabilités

DURÉE : 3 heures

N.B. — *Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).*

Les candidats doivent impérativement respecter la précision demandée dans les résultats numériques.

EXERCICE (*sur 5 points*)

Dans le tableau ci-dessous, y représente, en milliers de tonneaux de jauge brute, la capacité totale des navires marchands mis en service dans le monde (à l'exclusion de l'URSS, la Roumanie et la Chine), au cours des années 1969 à 1975.

	1969	1970	1971	1972	1973	1974	1975
Rang de l'année t_i ...	1	2	3	4	5	6	7
y_i	18 738	20 979	24 387	26 748	30 408	33 541	34 202

SOURCE : *Lloyd's Register of Shipping.*

.../...

S.C.A.E.

1983

1° Représenter le nuage des points $M_i(t_i ; y_i)$ sur papier semi-logarithmique.

Qu'en concluez-vous?

2° On pose $v_i = \log y_i$ (log = logarithme décimal).

N.B. — Les valeurs des v_i seront arrondies, au plus proche, à 10^{-3} près.

Reproduire et compléter le tableau suivant :

t_i	y_i	v_i	.....
1			
.			
.			
7			

en faisant apparaître tous les résultats permettant le calcul des coefficients a et b de l'équation demandée ci-dessous.

Donner, sous la forme $v = at + b$, l'équation de la droite de régression de v en t.

(a et b seront arrondis, au plus proche, à 10^{-3} près et le candidat rappellera les formules qu'il utilise pour ces calculs.)

3° A quel couple (t, y) correspond le point moyen G du nuage de points?

(y sera donné à une unité près.)

Placer ce point sur le graphique précédent et tracer la droite de régression de v en t.

(Le candidat devra préciser les deux points qu'il a choisis pour tracer cette droite.)

4° En déduire, entre y et t, une relation de la forme $y = kd^t$.

(k sera arrondi à une unité près et d sera arrondi à 10^{-3} près.)

PROBLEME (sur 15 points)

Ce problème comprend trois parties indépendantes.

I

Dans une banque, on a relevé les montants des retraits en espèces effectués par 1 000 clients sur une période de un mois. On a obtenu les résultats suivants :

Montant des retraits (en F) x_i	Nombre de clients n_i
Moins de 500	5
[500 à 1 000[	12
[1 000 à 1 500[	33
[1 500 à 2 000[	71
[2 000 à 2 500[	119
[2 500 à 3 000[	175
[3 000 à 3 500[	185
[3 500 à 4 000[	158
[4 000 à 4 500[	122
[4 500 à 5 000[	69
[5 000 à 5 500[	35
[5 500 à 6 000[	11
6 000 et plus	5

1° Montrer, à l'aide de la droite de Henry, que cette distribution peut être approchée en utilisant une loi normale.

En déduire graphiquement votre estimation personnelle de la moyenne et de l'écart-type de cette distribution.

2° Le total des retraits en espèces effectués par un client quelconque sur une période de un mois définit une variable aléatoire X.

On admet que X suit la loi normale de moyenne 3 250 et d'écart-type 1 050.

N.B. — Pour les calculs suivants, les valeurs de la variable centrée réduite seront arrondies, au plus proche à 0,01 près et les probabilités demandées seront arrondies, au plus proche à 0,0001 près.

a. Calculer la probabilité que le montant total des retraits effectués en un mois par un client soit supérieur ou égal à 3 800 F.

b. Calculer la probabilité que le montant total des retraits effectués en un mois par un client soit au moins égal à 2 400 F et au plus égal à 4 500 F.

c. Calculer la probabilité que le montant total des retraits effectués en un mois par un client soit au moins de 2 800 F sachant qu'il est au plus de 5 300 F.

. . . / . . .

II

La banque dispose également d'un distributeur automatique d'où les clients peuvent retirer des billets de 500 F à l'aide d'une carte magnétique. Chaque client ne peut retirer plus de 4 billets par semaine.

Dans cette partie du problème on ne s'intéresse qu'aux utilisateurs de ce distributeur.

1° Le nombre de billets retirés par un client pendant une semaine définit une variable aléatoire B. On suppose que sa loi de probabilité est définie par le tableau suivant :

b_i	1	2	3	4
$p\{B = b_i\}$	0,1	0,4	0,3	0,2

Calculer l'espérance mathématique et l'écart-type de B (ce dernier sera arrondi, au plus proche, à 0,0001 près).

2° La somme totale retirée par deux clients au cours d'une semaine définit une variable aléatoire Y. (Les retraits effectués par les deux clients sont évidemment indépendants.)

a. Déterminer sa loi de probabilité.

b. Calculer son espérance mathématique et son écart-type (ce dernier sera arrondi, au plus proche, à 0,01 près).

3° La banque a constaté que le nombre d'utilisateurs de ce distributeur dans un intervalle de une heure est en moyenne égal à 5 et que la variable aléatoire Z définie par ce nombre d'utilisateurs suit une loi de Poisson.

a. Quelle est la variance de Z?

b. Calculer, à 0,001 près, la probabilité que le nombre de clients utilisant le distributeur au cours d'une heure soit :

α. égal à 4;

β. strictement supérieur à 7.

c. Calculer, à 0,001 près, la probabilité que le nombre d'utilisateurs au cours d'une heure soit égal à 4 et que 2 d'entre eux (exactement) retirent chacun 2 000 F.

III

La banque a procédé à une étude statistique sur un échantillon de clients salariés. Pour chacune des personnes concernées on a relevé, sur une période fixée, d'une part une estimation du revenu mensuel moyen R (en milliers de F), d'autre part la valeur S (en milliers de F), du solde moyen du compte courant.

A partir de cette étude on admet que la loi de probabilité conjointe du couple (R, S) est la suivante :

S (classes) \ R (classes)	Centres r_j / Centres s_i	[3, 5[	[5, 7[	[7, 9[	[9 - 11[	[11, 13]
		4	6	8	10	12
[0, 1[	0,5	0,06	0,07	0,08	0,04	0,01
[1, 2[	1,5	0,03	0,10	0,10	0,06	0,02
[2, 3[	2,5	0,01	0,02	0,15	0,09	0,05
[3, 4[	3,5	0	0,01	0,02	0,05	0,01
[4, 5]	4,5	0	0	0	0,01	0,01

Les variables R et S sont-elles indépendantes?

2° Calculer l'espérance mathématique et la variance de chaque variable.

3° Calculer la covariance du couple (R, S).

Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (R, S).

(Le résultat sera arrondi, au plus proche, à 0,001 près et le candidat citera la formule utilisée.)

4° Sachant que le revenu mensuel moyen d'un client est supérieur ou égal à 7 000 F, quelle est la probabilité que le solde moyen de son compte courant soit supérieur ou égal à 2 000 F et strictement inférieur à 4 000 F? (Ce résultat sera arrondi, au plus proche, à 0,001 près.)

5° Donner la loi de probabilité de S sachant l'événement $(5 \leqslant R \leqslant 7)$.

FIN